Mat. Symp. str. 31–39

Henryk FILCEK
Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

Równowaga ośrodka ciągłego

Streszczenie

Przedstawiono problem równowagi ośrodka ciągłego. Podano definicję ośrodka ciągłego, równania równowagi, możliwości rozwiązywania zagadnień równowagi statycznej i dynamicznej oraz warunki brzegowe.

1. Ośrodek ciągły

Rozkład naprężenia w ośrodku ciągłym jest na ogół niejednorodny, co oznacza, że naprężenia (tensor naprężenia) zmienia się od punktu do punktu.

Jeżeli istnieje funkcja f_{ij}, według której naprężenie zależy od położenia, czyli od współrzędnych:

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(x, y, z) \tag{1.1}$$

a funkcja f_{ij} jest ciągła, to ośrodek jest ciągły z punktu widzenia rozkładu naprężenia.

Tylko tak sformalizowana definicja jest jednoznaczna. Definicje o charakterze fizycznym umożliwiają jedynie ocenę stopnia przybliżenia ośrodka rzeczywistego do sformalizowanego, idealnego ośrodka ciągłego.

Funkcję ciągłą można rozłożyć w szereg Taylora. Jeśli naprężenie w punkcie A(x,y,z) jest σ_{ij} to w punkcie sąsiednim B ($x+dx$, $y+dy$, $z+dz$), który leży nieskończenie blisko punktu A, naprężenie (z pominięciem małych rzędu wyższego) będzie:

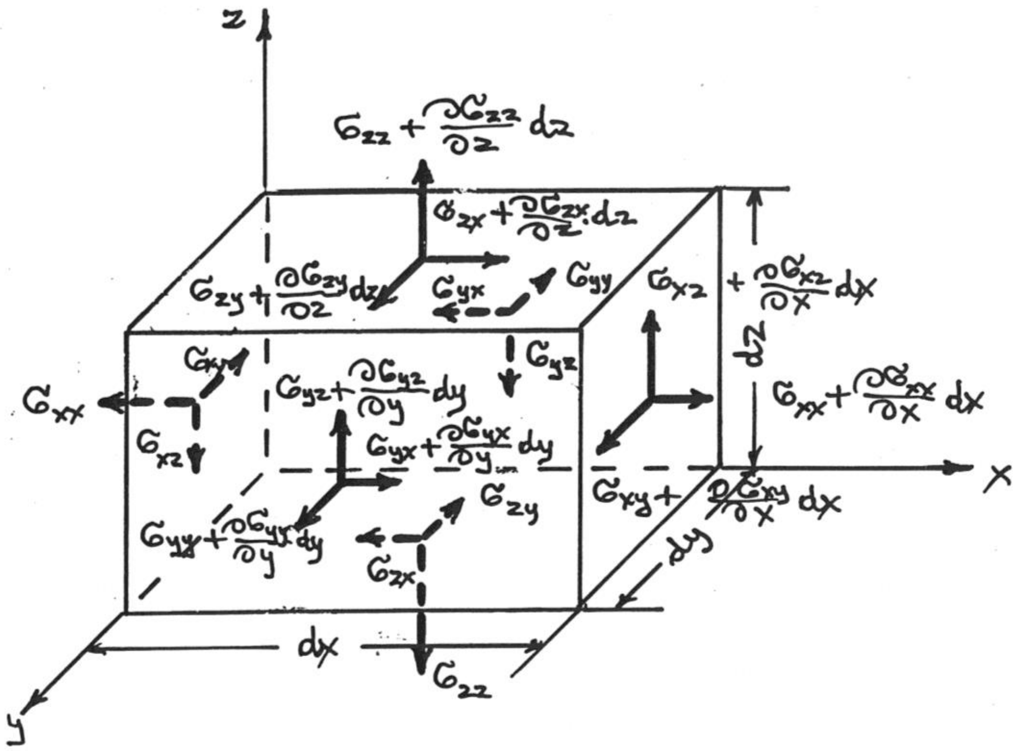
$$\sigma_{ij}^{B} = \sigma_{ij} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial z} dz \tag{1.2}$$

Aby w zależności (1.2) zapisać odpowiedni przyrost naprężenia, należało np. $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x}$, czyli intensywność zmiany naprężenia związanej ze zmianą współrzędnej x, pomnożyć przez konkretną zmianę współrzędnej x, czyli dx.

Zależność (1.2) jest szczególnie prosta, gdy punkty A i B leżą na prostej równoległej do jednej z osi współrzędnych, np. osi x. Wtedy bowiem $dy = dz = 0$, wobec czego:

$$\sigma_{ij}^{B} = \sigma_{ij} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x} dx \tag{1.3}$$

Posługując się zapisem typu (1.3) oznaczymy składowe naprężenia na ścianach elementarnego prostopadłościanu wydzielonego z rozpatrywanego ośrodka ciągłego (rys. 1.1).



Rys. 1.1. Składowe naprężenia na ściankach elementarnego prostopadłościanu w ośrodku ciągłym

2. Równania równowagi

Ośrodek ciągły jest w równowadze, jeśli każdy elementarny prostopadłościan z niego wydzielony jest w równowadze. Układ sił działających na elementarny prostopadłościan musi spełniać warunki równowagi:

$$\begin{aligned} &\Sigma\, Px = 0, \quad \Sigma\, Mx = 0 \\ &\Sigma\, Py = 0, \quad \Sigma\, My = 0 \\ &\Sigma\, Pz = 0, \quad \Sigma\, Mz = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

co oznacza, że algebraiczne sumy rzutów sił na trzy wzajemnie prostopadłe osie i algebraiczne sumy momentów względem trzech wzajemnie prostopadłych osi muszą być równe zeru.

Rozwińmy pierwszy z warunków równowagi (2.1), posługując się rysunkiem 1.1:

$$\begin{aligned}\sum P_x = &\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx\right) dydz - \sigma_{xx} dydz + \\ &+\left(\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy\right) dzdx - \sigma_{yx} dzdx + \\ &+\left(\sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz\right) dxdy - \sigma_{zx} dxdy\end{aligned} \tag{2.2}$$

Dla uzyskanych rzutów sił odpowiednie składowe naprężenia zostały pomnożone przez pole ścianki, na której działają. Pole ścianki elementarnego prostopadłościanu jest nieskończenie małe, wobec czego rozkład naprężenia po ściance można uważać za równomierny.

Jeśli wykonać działanie przewidziane zapisem (2.2), to uwzględniając twierdzenie Cauchy'ego o równości odpowiednich składowych stycznych naprężenia, czyli:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \quad \sigma_{zx} = \sigma_{xz} \tag{2.3}$$

otrzymamy:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial_x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial_y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial_z} = 0 \tag{2.4}$$

Rozwinięcie kolejnych dwóch warunków równowagi (2.1) można zastąpić cykliczną zmianą wskaźników w wyrażeniu (2.4) według schematu:

$$x \to y \to z \to x$$

Ostatecznie otrzymamy trzy równania równowagi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial_x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial_y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial_z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial_x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial_y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial_z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial_x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial_y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial_z} = 0\end{aligned} \tag{2.5}$$

lub w zapisie kompaktowym:

$$\sum \frac{\partial}{\partial_j} \sigma_{ij} = 0 \tag{2.6}$$

$i,j = x,y,z$.

Równania (2.5), (2.6) nazywane są (z uwagi na swój charakter) **różniczkowymi równaniami równowagi wewnętrznej ośrodka ciągłego**.

W równaniach (2.5), (2.6) uwzględniono jedynie siły wewnętrzne związane ze składowymi naprężenia. Jeśli działają ponadto siły masowe (objętościowe), np. siła ciężkości, siła do lub odśrodkowa, należy uwzględnić w (2.5) odpowiednie składowe tych sił:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial_x}+\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial_y}+\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial_z}+\rho X=0 \\ &\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial_x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial_y}+\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial_z}+\rho Y=0 \\ &\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial_x}+\frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial_y}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial_z}+\rho Z=0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

gdzie:

ρ – masa właściwa (gęstość) [kg/m^3],

X, Y, Z – składowe siły masowej odniesione do jednostki masy, [$\frac{N}{kg}$].

Równania (2.5), (2.6), (2.7) dotyczą równowagi statycznej. W przypadku równowagi dynamicznej należy w nich uwzględnić siłę bezwładności:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial_x}+\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial_y}+\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial_z}+\rho X=\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ &\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial_x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial_y}+\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial_z}+\rho Y=\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \\ &\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial_x}+\frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial_y}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial_z}+\rho Z=\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{2.8}$$

gdzie:

u_x, u_y, u_z – składowe przemieszczenia [m],

t – czas [s].

Wzór (2.8) stanowi najpełniejszy zapis różniczkowych równań równowagi ośrodka ciągłego.

Równania równowagi wewnętrznej mają charakter uniwersalny i dotyczą każdego ośrodka ciągłego, bez względu na jego własności fizyczne (np. fazę skupienia).

3. Dowód twierdzenia Cauchy'ego

Rozwińmy ostatni z warunków równowagi (2.1) czyli warunek zerowania się algebraicznej sumy momentów względem osi z. Dla ułatwienia na rysunku 3.1 przedstawiono elementarny prostopadłościan w ośrodku ciągłym tylko z tymi składowymi naprężenia, które dają momenty sił wewnętrznych względem osi z różne od zera (nie przechodzą przez oś z i nie są do niej równoległe, żaden wskaźnik nie może być z). Początek układu współrzędnych przyjęto dla wygody w środku prostopadłościanu (rys. 3.1).

$$\sum M_z = (\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial_x} dx) dydz \cdot \frac{1}{2} dx + \sigma_{xy} dydz \cdot \frac{1}{2} dx$$
$$- (\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial_y} dy) dzdx \cdot \frac{1}{2} dy - \sigma_{yx} dzdx \cdot \frac{1}{2} dy = 0$$

czyli

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \tag{3.1}$$

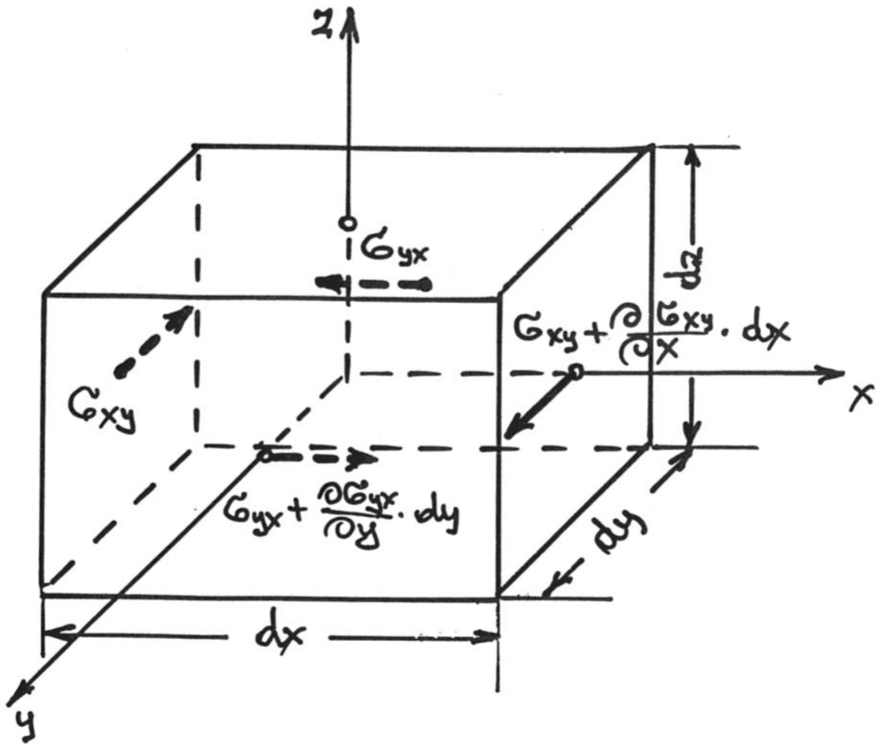
Rozwinięcie pozostałych dwóch warunków równowagi

$$(\sum M_x = 0, \ \sum M_y = 0)$$

można zastąpić cykliczną zmianą wskaźników w (3.1), wobec czego otrzymamy ostatecznie:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} \\ \sigma_{yz} &= \sigma_{zy} \\ \sigma_{zx} &= \sigma_{xz} \end{aligned} \tag{3.2}$$

co stanowi dowód twierdzenia Cauchy'ego o równości składowych stycznych naprężenia o tych samych wskaźnikach, choćby napisanych w odwrotnym porządku.



Rys. 3.1. Składowe naprężenia na ściankach elementarnego prostopadłościanu w ośrodku ciągłym, które dają momenty sił wewnętrznych względem osi z różne od zera

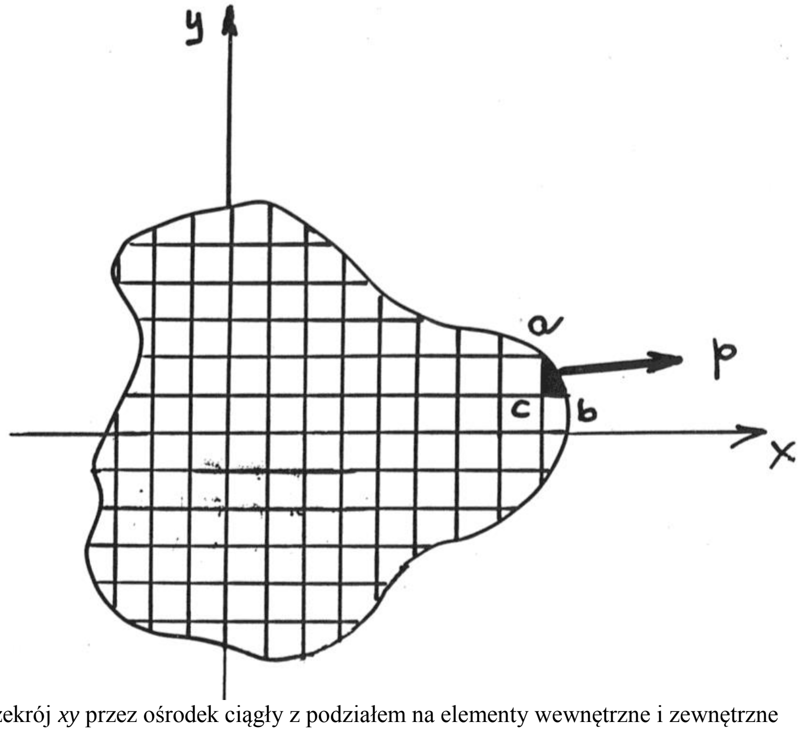
4. Możliwości rozwiązywania zagadnień równowagi statycznej i dynamicznej ośrodka ciągłego

Różniczkowe równania równowagi wewnętrznej ośrodka ciągłego (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) stanowią układ trzech równań o sześciu niewiadomych składowych naprężenia (tensora naprężenia). Zagadnienie równowagi wewnętrznej ośrodka ciągłego jest więc zagadnieniem statycznie niewyznaczalnym (trzykrotnie hiperstatycznym). Dla efektywnego rozwiązania zagadnienia niezbędna jest analiza odkształcenia i jego związku z naprężeniem (równania fizyczne, konstytutywne).

Równania równowagi wewnętrznej ośrodka ciągłego (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) są równaniami różniczkowymi. Ich rozwiązanie wymaga całkowania, w związku z którym pojawiają się niewiadome **stałe całkowania**. Wyznacza się je z **warunków brzegowych** rozpatrywanego zagadnienia. Warunki brzegowe stanowią pomost między wewnętrzną a zewnętrzną równowagą ośrodka i muszą uwzględniać poza siłami wewnętrznymi także siły zewnętrzne czyli obciążenie ośrodka.

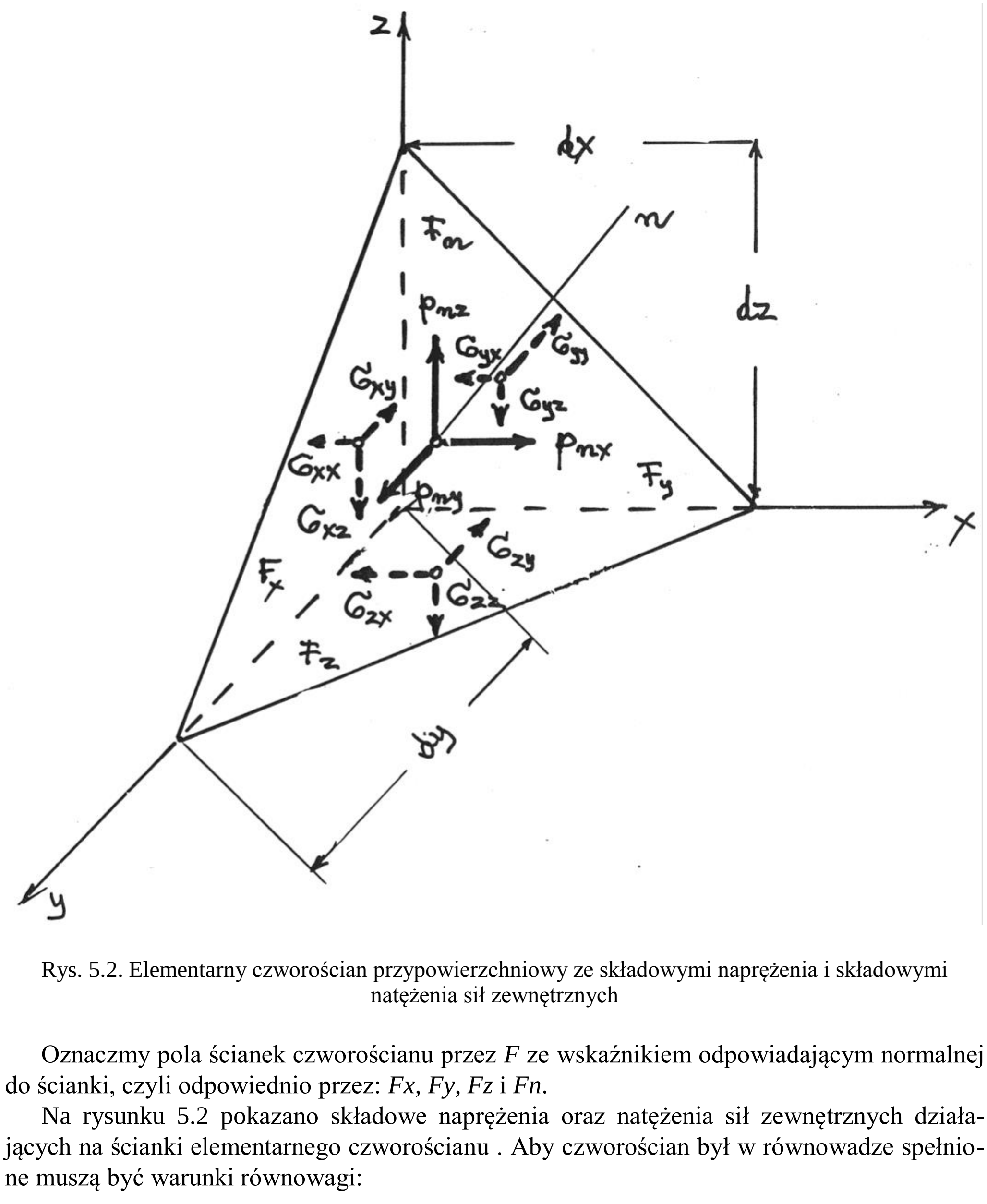
5. Warunki brzegowe

Weźmy pod uwagę pewien przekrój *xy* przez dowolny ośrodek ciągły (rys. 5.1). Przy podziale na elementarne prostopadłościany o krawędziach równoległych do osi *xyz* pojawią się w ogólnym przypadku elementy niebędące prostopadłościanami, np. element, którego przekrój oznaczono na rysunku 5.1 jako *abc*.



Rys. 5.1. Przekrój *xy* przez ośrodek ciągły z podziałem na elementy wewnętrzne i zewnętrzne (przypowierzchniowy element *abc*)

W ogólnym przypadku element *abc* nie będzie pryzmatyczny o stałym wzdłuż osi *z* przekroju *xy*. Jeśli z powodu nieskończenie małych rozmiarów przyjąć, że odcinek krzywej *ab* jest prosty (przekrój *abc* jest trójkątem), to i tak element *abc* nie będzie graniastosłupem trójkątnym, lecz w ogólnym przypadku **czworościanem**. Czworościan elementarny będzie miał trzy ścianki wewnętrzne odpowiadające płaszczyznom współrzędnych, oraz jedną ściankę zewnętrzną skośną (rys. 5.2).



Rys. 5.2. Elementarny czworościan przypowierzchniowy ze składowymi naprężenia i składowymi natężenia sił zewnętrznych

Oznaczmy pola ścianek czworościanu przez *F* ze wskaźnikiem odpowiadającym normalnej do ścianki, czyli odpowiednio przez: *Fx, Fy, Fz* i *Fn*.

Na rysunku 5.2 pokazano składowe naprężenia oraz natężenia sił zewnętrznych działających na ścianki elementarnego czworościanu . Aby czworościan był w równowadze spełnione muszą być warunki równowagi:

$$\Sigma P_x = 0, \quad \Sigma P_y = 0, \quad \Sigma P_z = 0 \tag{5.1}$$

Rozważmy pierwszy z nich:

$$\Sigma P_x = -\sigma_{xx} F_x - \sigma_{yx} F_y - \sigma_{zx} F_z + p_n F_n = 0 \tag{5.2}$$

Uwzględniając w (5.2) związki, jakie zachodzą między cosinusami kierunkowymi a stosunkiem pól odpowiednich ścianek:

$$\cos(n,x) = \frac{F_x}{F_n}, \quad \cos(n,y) = \frac{F_y}{F_n}, \quad \cos(n,z) = \frac{F_z}{F_n} \tag{5.3}$$

otrzymamy:

$$p_{nx} F_n = \sigma_{xx} \cos(n,x) F_n + \sigma_{yx} \cos(n,y) F_n + \sigma_{zx} \cos(n,z) F_n$$

a po podzieleniu stronami przez F_n oraz uwzględnieniu twierdzenia Cauchy'ego:

$$p_{nx} = \sigma_{xx} \cos(n,x) + \sigma_{xy} \cos(n,y) + \sigma_{xz} \cos(n,z) \tag{5.4}$$

Dla skrócenia zapisu oznaczymy cosinusy kierunkowe jedną literą l z odpowiednim wskaźnikiem:

$$\cos(n,x) = l_x, \quad \cos(n,y) = l_y, \quad \cos(n,z) = l_z \tag{5.5}$$

Rozwinięcie pozostałych dwóch warunków równowagi ($\Sigma P_y = 0$, $\Sigma P_z = 0$) można zastąpić cykliczną zmianą wskaźników, wobec czego otrzymamy ostatecznie:

$$\begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_{xx} l_x + \sigma_{xy} l_y + \sigma_{xz} l_z \\ p_{ny} &= \sigma_{yx} l_x + \sigma_{yy} l_y + \sigma_{yz} l_z \\ p_{nz} &= \sigma_{zx} l_x + \sigma_{zy} l_y + \sigma_{zz} l_z \end{aligned} \tag{5.6}$$

lub w zapisie kompaktowym:

$$p_{ni} = \Sigma \sigma_{ij} l_i \tag{5.7}$$

$i, j = x, y, z$

Warunki brzegowe (5.6), (5.7) stanowią związek między obciążeniem, czyli siłami zewnętrznymi, i siłami wewnętrznymi związanymi ze składowymi naprężenia. Warunki brzegowe pozwalają na wyznaczenie niewiadomych stałych całkowania, pojawiających się podczas rozwiązywania różniczkowych równań równowagi wewnętrznej (2.5), (2.6), (2.7), (2.8).

Różniczkowe równania równowagi wewnętrznej ośrodka ciągłego (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) muszą być traktowane zawsze łącznie z warunkami brzegowymi (5.6), (5.7) rozpatrywanego zagadnienia.

Problem równowagi ośrodka ciągłego sprowadza się do rozwiązania układu równań równowagi z uwzględnieniem warunków brzegowych, co w zapisie kompaktowym przedstawia się następująco:

(warunki równowagi) $$\sum \frac{\partial}{\partial j} \sigma_{ij} = 0 \tag{5.7}$$

(warunki brzegowe) $$p_{ni} = \sum \sigma_{ij} l_i \tag{5.8}$$

gdzie:

σ_{ij} - składowe tensora naprężenia,

p_{ni} - składowe natężenia sił zewnętrznych (obciążenia),

l_i - cosinusy kierunkowe.

Jak już mówiliśmy w rozdziale 2., problem jest niestety statycznie niewyznaczalny (trzykrotnie hiperstatyczny) i dla efektywnego rozwiązania wymaga uzupełnienia o równania fizyczne (konstytutywne) rozpatrywanego ośrodka ciągłego.

6. Udział sił masowych i (lub) sił bezwładności w warunkach brzegowych

W zagadnieniach równowagi elementarnego czworościanu mogą występować następujące rodzaje sił:

a) Siły wewnętrzne, związane ze składowymi naprężenia, np.

$$\sigma_{xx} F_x = \frac{1}{2} \sigma_{xx}\ dydx \tag{6.1}$$

gdzie: F_x –pole ścianki o normalnej x

b) Siły masowe (objętościowe) np.

$$\rho X V = \frac{1}{6} \rho X\ dxdydz \tag{6.2}$$

gdzie: V – objętość elementarnego czworościanu.

c) Siły bezwładności, np.

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} V = \frac{1}{6} \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}\ dxdydz \tag{6.3}$$

Siły masowe (6.2) i siły bezwładności (6.3) są w stosunku do sił wewnętrznych (6.1) małymi rzędu wyższego, wobec tego nie będą występowały w warunkach brzegowych (5.6), (5.7).

Wykład Profesora H. Filcka jest kontynuacją tematyki prezentowanej przez niego na kolejnych Warsztatach Górniczych 2004 i 2005 (przyp. Redakcji).